

# Instituto de Física

## FGE0327-Introdução à Ótica I

Notas de aula

Prof. Marcelo Martinelli

# 1 Tópicos de História da Ótica

A Ó(p)tica, ou “estudo da luz”, já foi abordada ao longo dos cursos de Física Básica, em especial, na Física III e IV, e nos respectivos laboratórios. Nossa proposta neste curso é aprofundar o conhecimento deste tema, abordando tanto a teoria quanto experimentos e demonstrações de ótica geométrica e física no laboratório.

Um bom apanhado histórico pode ser visto no livro “Optics” de Hecht e Zajac. Os conhecimentos empíricos sobre os fenômenos luminosos básicos, como refração e reflexão, já eram conhecidos desde a antiguidade. Espelhos de metal polido foram encontrados em diversas civilizações. A refração da luz permite a confecção de lentes desde o século III AC.

Estes conceitos, mais o conceito de que a luz se propaga em uma trajetória retilínea, permitiram o surgimento da Ótica Geométrica, além da confecção dos primeiros instrumentos óticos, como lunetas, microscópios, lupas, e mesmo ótica para correção de defeitos da visão.

Para isso, bastava saber que, em uma interface entre dois meios, a refração da luz é dada por

$$n_1\theta_1 = n_2\theta_2, \quad (1)$$

limitada à pequenos ângulos de incidência, e a relação entre os ângulos de incidência e reflexão

$$\theta_i = \theta_r. \quad (2)$$

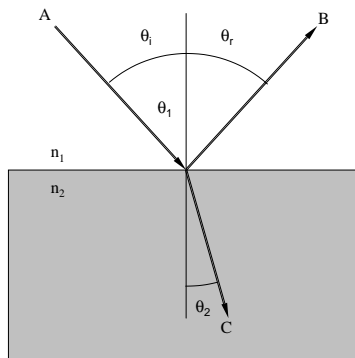


Figura 1: Refração e reflexão da luz em uma interface.

É no século XVII que começam a se observar outros efeitos. Foi no começo desse século que Snell e Descartes, independentemente, chegaram a uma relação exata para a refração

$$n_1 \text{sen} \theta_1 = n_2 \text{sen} \theta_2. \quad (3)$$

Descartes chegou a esta relação baseando-se na idéia que luz é um efeito de pressão em um meio elástico, o que aproxima a idéia da luz do estudo de ondas sonoras! Posteriormente, Fermat, em 1657, propõe o princípio do tempo mínimo, pelo qual, para a luz partir de um ponto A e chegar a um ponto B, ela deve fazer o trajeto no menor tempo possível. Ou seja, a luz toma a rota mais rápida.

Posteriormente, a decomposição da luz branca em diferentes cores ao atravessar um prisma é descrita por Newton, e mostra estar ligada a uma mudança na refração da luz de acordo com a cor observada. Isto explica o efeito de aberração cromática, observado em lentes. Newton, por exemplo, vendo o problema da aberração cromática de lentes como uma limitação ao desenvolvimento de melhores instrumentos de observação astronômica, desenvolveu telescópios com espelhos refletores.

Estamos aqui no limite da Ótica Geométrica, o princípio de Fermat carece de uma justificativa menos empírica, e ainda temos os efeitos de interferência observados por Newton. É nesta circunstância que surge a descrição da luz como onda, a formulação do princípio de Huygens, contemporâneo a Newton.

No século seguinte, temos alguns avanços, como a demonstração de que, em primeira ordem, a combinação de lentes de convergentes e divergentes, compostas de vidros diferentes, permite a confecção de lentes compostas que corrigem a aberração cromática (ao menos em primeira ordem). É, porém, no século XIX que a teoria ondulatória se confirma, através dos experimentos de interferência, como a fenda dupla de Young (1801).

Partindo desta descrição ondulatória, os efeitos de difração, observados desde o século XVII, são matematicamente descritos por Fresnel e Fraunhofer.

Paralelamente, temos os estudos da medida da velocidade da luz, mostrando que esta é finita. A primeira medida razoável foi obtida por Römer em 1676. Observando a lua mais próxima de Júpiter, Io, ele mediu seu período de revolução em torno do planeta em 42,5 horas. Com este “relógio astronômico” medido, ele pode repetir a medida da posição da lua com intervalo de vários meses, entre uma posição da Terra próxima ao planeta e outra mais afastada. O que se nota é que, com o afastamento da Terra, a imagem da lua se encontra “atrasada” em relação à posição que era esperada pelo seu período de revolução. Este atraso deve-se à diferença de trajeto entre as duas posições da Terra. Com este atraso, mais o raio da órbita terrestre, ele pôde estimar a velocidade da luz, chegando a um valor de cerca de  $2/3$  do atualmente aceito. Posteriormente, Fizeau, em 1849, realizou uma série de experimentos onde, com o auxílio de um espelho giratório, conseguiu obter um valor bem próximo a  $2,998 \times 10^8 m/s$ .

Por fim, um outro caráter observado em efeitos luminosos é o da polarização da luz. Observado por Newton, esse efeito foi melhor estudado no século XIX. A luz transmitida por alguns cristais, como a calcita, apresenta uma dependência do índice de refração, decompondo os raios em duas componentes de velocidades diferentes. Analisando a luz refletida por uma janela de vidro com este cristal, Brewster, mostrou que a luz refletida por uma interface, como uma janela de vidro, em um certo ângulo, apresenta apenas um tipo de “raio”. Isto leva a inferir uma característica transversa da onda luminosa, como por exemplo uma onda em uma corda.

O cenário posto mostra que a luz é descrita por uma teoria ondulatória, dando origem aos efeitos de difração e interferência. Esta teoria ondulatória descreve bem os efeitos de reflexão e de refração da luz, a qual pode ser entendida como a relação da velocidade da luz no vácuo e em um meio material. Temos ainda que esta onda tem um caráter transversal, descrito pela polarização, ao contrário de ondas sonoras, longitudinais. O comprimento de onda da luz está ligado à percepção física da cor, e várias fontes podem emitir seja luz composta por um espectro contínuo de comprimentos de onda, seja um espectro discreto. É na segunda metade do século XIX que surge uma explicação física fundamental, que descreve todos estes fenômenos ao unificar a Ótica ao Eletromagnetismo.

## Bibliografia

Pesquise na biblioteca algumas das referências sobre história da ótica. O primeiro capítulo do Hecht [1] há uma boa descrição, além de livros de Física Básica sobre o tema [2].

## 2 As equações de Maxwell

Foi na segunda metade do século XIX que James Clerk Maxwell completou a descrição do Eletromagnetismo.<sup>1</sup> Até então, se conheciam a lei de Gauss, que permite descrever o campo elétrico gerado por uma distribuição de cargas, relacionando o *fluxo* do campo elétrico por uma superfície *fechada*, e a carga total envolvida por esta superfície (incluindo aqui cargas de polarização).

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{tot}/\epsilon_0. \quad (4)$$

O tratamento matemático fica muito mais simplificado se, ao invés de usar a carga completa, descontarmos a carga de polarização. Podemos empregar neste caso o vetor *deslocamento elétrico*  $\vec{D}$ , relacionando-o com o *campo elétrico*  $\vec{E}$  através de um tensor de susceptibilidade  $\vec{\epsilon}$ .

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}. \quad (5)$$

Por que usar um *tensor* de susceptibilidade, no lugar de um escalar? Como veremos, usando um tensor iremos descrever a interação mesmo em meios anisotrópicos. Para meios isotrópicos (como, obviamente, é o caso do vácuo), o tensor se reduz a um escalar.

Desse forma, levando em conta a polarização, temos para a lei de Gauss

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = q = \int_V \rho \, dv, \quad (6)$$

onde a carga  $q$  representa a carga *livre* envolvida pela superfície, dada pela integração da densidade de carga livre  $\rho$  no volume  $V$  envolvido. Deste resultado, podemos obter a lei de Coulomb, onde o campo elétrico cai com o quadrado da distância à uma carga pontual.

Como consequência da inobservância de monopolos magnéticos, podemos inferir também que o vetor *indução magnética*  $\vec{B}$  (por vezes chamado de campo magnético, por abuso de linguagem) tem uma relação semelhante à lei de Gauss, porém com a carga magnética  $q_m = 0$

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0. \quad (7)$$

Ampère mostrou que as fontes do campo magnético são correntes elétricas, ou magnetismo na matéria. Mostra-se então que a integral de linha do vetor  $\vec{B}$  em uma *trajetória fechada* depende da corrente *envolvida* pela trajetória

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I = \mu_0 \int_{S'} \vec{j} \cdot d\vec{a}, \quad (8)$$

---

<sup>1</sup>Vamos descrever brevemente as equações de Maxwell, e como dela chegamos à equação de onda para o campo eletromagnético. Recomendo, se for o caso, uma pequena revisão. O livro de Física Básica do Moisés [3] traz uma ótima descrição dos conceitos aqui apresentados.

onde a corrente  $I$  é dada pela integral da densidade de corrente  $\vec{j}$  na superfície  $S'$ , aberta, limitada pela trajetória  $C$ . Claro está que isto é válido no vácuo. Com meios materiais, devemos levar em consideração a magnetização do meio. Podemos definir um vetor *intensidade magnética*  $\vec{H}$ , depende apenas da corrente “livre”, descontando a contribuição do magnetismo de meios materiais (interpretado então, como uma “corrente de magnetização” induzindo dipolos semelhantes aos dipolos elétricos induzidos pela presença de um campo elétrico). DO mesmo modo que para o campo elétrico, a relação constitutiva

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (9)$$

relaciona os vetores intensidade e indução magnética. O resultado é um campo  $H$  dependente apenas das correntes livres

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I = \int_{S'} \vec{j} \cdot d\vec{a}. \quad (10)$$

Por fim, Faraday observou que o campo elétrico pode ser gerado não só por cargas, mas por uma variação do campo magnético. Especificamente, a integral de linha do campo elétrico em uma trajetória fechada é igual à *variação do fluxo* do vetor indução magnética pela superfície aberta limitada por esta trajetória

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{a}. \quad (11)$$

Maxwell observou que a equação de Ampère 10 apresentava discrepâncias, como por exemplo, na carga de um capacitor. Um trajeto envolvendo as placas, externo à elas, vai apresentar um resultado não nulo para o campo se a superfície escolhida cortar o fio que conduz a carga ao capacitor, e um resultado nulo se esta superfície ficar entre as placas (por onde obviamente não circula corrente). No entanto, se você considerar uma variação do fluxo do vetor deslocamento, a relação é satisfeita para qualquer superfície escolhida

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S'} \vec{j} \cdot d\vec{a} + \frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{a}. \quad (12)$$

A consequência desta *corrente de deslocamento* adicionada por Maxwell é dramática. Com ela, mostra-se que não só o campo magnético é gerado por correntes, mas também por variações do campo elétrico, em uma contrapartida à lei de Faraday!

A aplicação destas equações para demonstrar a equação de onda eletromagnética ficará simplificada se, em lugar de empregá-las na forma integral, usarmos a forma diferencial. Para isso, vale lembrar o teorema do divergente ([3])

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dv, \quad (13)$$

e o teorema do rotacional

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S'} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{a}, \quad (14)$$

onde  $\vec{F}$  é um vetor qualquer.

Aplicando-os às equações acima, obtemos as equações de Maxwell na forma diferencial

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = \int_V \rho \, dv \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (15)$$

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (16)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{a} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (17)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S'} \vec{j} \cdot d\vec{a} + \frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{a} \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (18)$$

Estas equações, na forma diferencial, conhecidas como equações de Maxwell, mais as relações constitutivas, que descrevem a resposta da matéria aos campos, permitem descrever “todos” os fenômenos eletromagnéticos.

Todos?

Na realidade, uma primeira consequência desta descrição é sua inconsistência com a transformada de variáveis de Galileu para referenciais inerciais (em velocidade constante relativa entre eles). Como já foi visto, isto levou às transformações de Lorentz, e ao princípio da relatividade restrita de Einstein. Ou seja, as equações de Maxwell se mostraram válidas, e a Mecânica Clássica um caso limite da teoria relativista.

As relações constitutivas,  $\vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}$  e  $\vec{B} = \vec{\mu} \cdot \vec{H}$ , por sua vez, são lineares. Para a permissividade do meio, a dependência tensorial dá origem aos efeitos de birrefringência, a serem estudados na polarização da luz. Para meios isotrópicos, o tensor pode ser substituído por um escalar.

Note que para o tensor permeabilidade magnética, temos quatro situações típicas: materiais diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos, e ferrimagnéticos. Os dois primeiros apresentam permeabilidades que diferem das do vácuo em menos de  $10^{-3}$ , de modo que seu caráter tensorial pode ser perfeitamente desprezado, e simplesmente adotarmos  $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ . Os outros dois apresentam efeitos importantes, levando a um grande aumento do campo magnético, com efeitos de saturação, histerese, etc. No entanto, por se tratarem de materiais tipicamente opacos para as ondas eletromagnéticas no visível, não serão considerados no curso de ótica, e adotaremos normalmente a permeabilidade do vácuo para os materiais óticos.

Se os campos aplicados forem muito intensos, ou se o meio absorver energia do campo incidente, efeitos de saturação começam a aparecer. Neste caso, substitui-se o tensor  $\vec{\epsilon}$  por um tensor dependente de produtos de ordem superior do campo

$$\vec{\epsilon}(\vec{E}) = \vec{\epsilon}_1 + \vec{E} \cdot \vec{\epsilon}_2 + \vec{E} \cdot \vec{E} \cdot \vec{\epsilon}_3 + \dots \quad (19)$$

Estamos no domínio dos efeitos não-lineares, que dão origem à Ótica Não-linear.

Por fim, em 1905, Einstein demonstrou que a radiação do corpo negro, descrita por Planck através do uso de osciladores quantizados, poderia ser descrita, de forma alternativa, pela quantização das trocas de energia entre o campo e a matéria, através de “quanta” de luz, de energia  $h\nu$ . Esta descrição da troca de energia entre campo eletromagnético e matéria explica ainda o efeito fotoelétrico. É o começo da noção de fóton, da descrição quântica do campo, e da Ótica Quântica.

### 3 Equação de onda

Para completar, vamos descrever como, partindo das equações de Maxwell, chegamos às equações de onda para os campos. Para isso, vamos partir do caso mais simples. Vamos considerar que o meio é isotrópico (tensores das equações constitutivas são substituídos por escalares), que os campos são pequenos (linearidade das equações constitutivas), e que estamos na ausência de cargas livres (correntes e cargas são nulas). As equações de Maxwell ficam na forma

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \times \vec{B} &= \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}\end{aligned}\quad (20)$$

Usando a relação  $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{F}$ , podemos tomar o rotacional das duas equações à direita. Lembrando que o divergente de  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$  são nulos, e que  $(\nabla \cdot \nabla) = \nabla^2$  é o operador laplaciano <sup>2</sup>, teremos

$$\begin{aligned}-\nabla^2 \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \\ -\nabla^2 \vec{B} &= \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E}.\end{aligned}\quad (21)$$

Substituindo agora as equações à direita da eq.(20), teremos finalmente as equações de onda

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} &= \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \\ \nabla^2 \vec{B} &= \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}.\end{aligned}\quad (22)$$

Veremos ao longo do curso as consequências deste formalismo. Por hora, basta dizer que aqui unificamos Eletromagnetismo e Ótica, mostrando que luz é uma onda eletromagnética, e mostrando que todos os fenômenos de Ótica Física (difração, interferência e polarização) podem ser descritos pelas equações de Maxwell.

Recomendo a leitura de referências que tratem deste assunto. Além do Hecht, vários livros de Ótica começam com a descrição da equação de onda e suas consequências.

### Referências

- [1] E. Hecht & A. Zajac, *Optics*, Addison-Wesley (1974).
- [2] H. M. Nussenzveig, *Física Básica 4*, Edgard Blücher (1998).
- [3] H. M. Nussenzveig, *Física Básica 3*, Edgard Blücher (1998).

---

<sup>2</sup>Em coordenadas cartesianas,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$