FGE0327-Introdução à Ótica I - 8^a Lista - Gabarito

Prof. Marcelo Martinelli

1^a **Questão**

Demonstre que o giro de polarização de uma lâmina de meia onda é igual ao dobro do ângulo entre o eixo ótico e o eixo de polarização da onda incidente. Mostre ainda que uma onda circularmente polarizada (dextrógira) é convertida em uma onda circularmente polarizada levógira

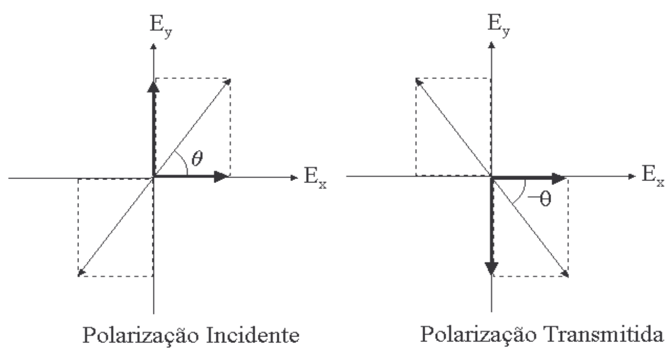
Considere a onda incidente como uma onda linearmente polarizada sobre uma lâmina da meia onda.

$$\begin{aligned}\vec{E}_{in} &= E_x cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_y cos(kz - \omega t)\hat{y} \\ &= Re\{(E_x\hat{x} + E_y\hat{y})\exp[i(kz - \omega t)]\}.\end{aligned}$$

No caso da lâmina de meia onda, com o eixo rápido alinhado na direção x, teremos na saída um atraso de fase de π no eixo lento (na direção y)

$$\begin{aligned}\vec{E}_{out} &= Re\{(E_x\hat{x} + E_y exp(-i\pi)\hat{y})\exp[i(kz - \omega t)]\} \\ &= E_x cos(kz - \omega t)\hat{x} - E_y cos(kz - \omega t)\end{aligned}$$

Como podemos ver, a componente na direção y sofre uma inversão de sinal, de modo que o ângulo que o campo elétrico faz com o eixo x muda de θ para $-\theta$, portanto um giro de polarização de 2θ



No caso de uma polarização circular incidente dextrógira, teremos

$$\begin{aligned}\vec{E}_{in} &= E_x cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_y sen(kz - \omega t)\hat{y} \\ &= Re\{(E_x\hat{x} + E_y exp(-i\pi/2)\hat{y})\exp[i(kz - \omega t)]\}.\end{aligned}$$

A transformação por uma lâmina de meia onda resulta em um campo de saída da forma

$$\begin{aligned}\vec{E}_{out} &= Re\{(E_x\hat{x} + E_y exp(-i3\pi/2)\hat{y})\exp[i(kz-\omega t)]\} \\ &= E_x cos(kz-\omega t)\hat{x}\hat{x} - E_y sen(kz-\omega t)\hat{y}.\end{aligned}$$

ou seja, em uma onda levógira.

2^a **Questão** Mostre que para uma polarização linear incidente, a polarização de saída de uma lâmina de quarto de onda é uma elipse. Obtenha a expressão para a elipcidade da onda resultante em função do ângulo entre o eixo ótico da lâmina e do eixo da polarização da onda incidente.

Neste caso, escolhendo os eixos cartesianos alinhados aos eixos da lâmina, teremos para uma onda linear incidente

$$\begin{aligned}\vec{E}_{in} &= E_x cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_y cos(kz-\omega t)\hat{y} \\ &= Re\{(E_x\hat{x} + E_y\hat{y})\exp[i(kz-\omega t)]\}.\end{aligned}$$

O ângulo entre a polarização linear e o eixo ótico orientado na direção $\hat{x}$ é dado por $tan\theta = E_y/E_x$

Na saída da lâmina, um atraso de fase de $\pi/2$ na componente y resulta em

$$\begin{aligned}\vec{E}_{out} &= Re\{(E_x\hat{x} + E_y exp(-i\pi/2)\hat{y})\exp[i(kz-\omega t)]\} \\ &= E_x cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_y sen(kz-\omega t)\hat{y}.\end{aligned}$$

Ou seja, uma elipse com semi-eixos E_x e E_y. A elipcidade é dada por $\varepsilon = |E_y|/|E_x| = |tan\theta|$ para $|\theta| < pi/4$, e por $\varepsilon = |E_x|/|E_y| = 1/|tan\theta|$ para $pi/4 < |\theta| < pi/2$.

3^a **Questão**

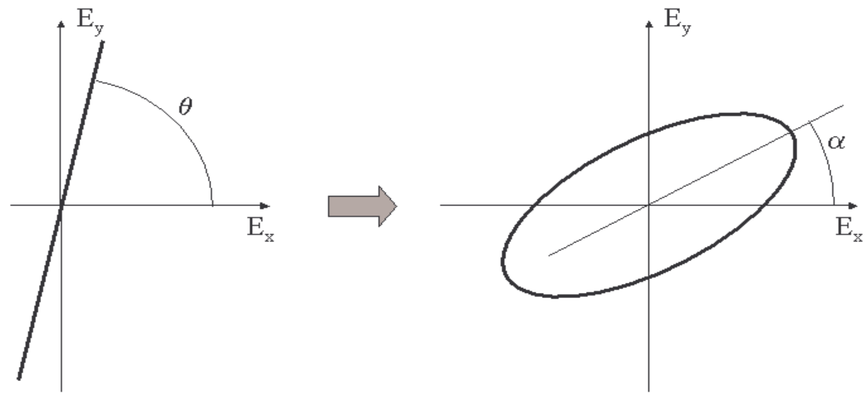
Conforme visto em aula, uma onda linearmente polarizada, ao atravessar um meio birrefringente, sofre um atraso de fase φ da componente polarizada na direção x com relação à componente polarizada na direção y. O resultado é uma onda elipticamente polarizada, cujo eixo maior faz um ângulo α com um dos eixos do meio birrefringente.

Assim, para uma onda linearmente polarizada fazendo um ângulo θ com o eixo do meio birrefringente, demonstre que:

a) o valor do ângulo α é dado por $\tan(2\alpha) = \tan(2\theta)\cdot\cos\varphi$.

A onda incidente

$$\begin{aligned}\vec{E}_{in} &= E_x cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_y cos(kz-\omega t)\hat{y} \\ &= E(cos\theta\hat{x} + sen\theta\hat{y})cos(kz-\omega t) \\ &= Re\{E(cos\theta\hat{x} + sen\theta\hat{y})\exp[i(kz-\omega t)]\},\end{aligned}$$



é transformada na saída pelo acréscimo de uma fase φ à componente y

$$\vec{E}_{out} \;=\; Re\{E(cos\theta\,\hat{x} + exp(i\varphi)\,sen\theta\,\hat{y})\exp[i(kz-\omega t)]\}.$$

Para obter o ângulo que o eixo maior da elipse faz com os eixos do meio birrefringente, e o tamanho dos eixos da elispse, devemos buscar os pontos de máximo e mínimo do campo em função do ângulo de análise. É como se tomássemos a onda de saída e analisássemos a intensidade transmitida por um polarizador alinhado na direção $\hat{x}' = cos\alpha\hat{x} + sen\alpha\hat{y}$, que irá projetar o campo em uma direção fazendo um ângulo α com o eixo do meio birrefringente.

A amplitude do campo de saída será dada por

$$\begin{aligned} E_a &= \vec{E}_{out}\cdot\hat{x}' \\ &= Re\{E(cos\theta cos\alpha + exp(i\varphi)sen\theta sen\alpha)\exp[i(kz-\omega t)]\}, \end{aligned}$$

e a intensidade será proporcional a

$$\begin{aligned} I_a &= 2\langle E_a^2\rangle \\ &= |E(cos\theta\,cos\alpha + exp(i\varphi)\,sen\theta\,sen\alpha)\exp[i(kz-\omega t)]|\|^2 \\ &= I_0(cos^2\theta\,cos^2\alpha + sen^2\theta\,sen^2\alpha + 2\,cos\theta\,sen\theta\,cos\alpha\,sen\alpha\,cos\varphi). \end{aligned}$$

A direção dos eixos maior e menor da elipse será dada pelos valores extremos da intensidade

$$\frac{1}{I_0}\frac{\partial I_a}{\partial\alpha} = -2\,sen\alpha cos\alpha\,cos^2\theta + 2\,sen\alpha cos\alpha\,sen^2\theta + 2\,cos\theta\,sen\theta\,cos\varphi\,(cos^2\alpha - sen^2\alpha) = 0.$$

Lembrando que $cos^2\theta - sen^2\theta = cos(2\theta)$ e $2\,cos\theta\,sen\theta = sen(2\theta)$, temos

$$cos\varphi\,sen(2\theta)\,cos(2\alpha) = sen(2\alpha)\,cos(2\theta). \tag{1}$$

No caso de $cos\varphi = 0$, $\varphi = \pm\pi/2$, ou seja, o meio atua como uma lâmina da quarto de onda. Neste caso temos $sen(2\alpha)\, cos(2\theta) = 0$, portanto $\alpha = (0, \pi/2)$. Os eixos maior e menor da elipse estão alinhados aos eixos da lâmina. Se $cos\varphi = -1$, $\varphi = \pm\pi$, e o meio atua como uma lâmina de meia onda. Neste caso $tan(2\alpha) = -tan(2\theta)$, o que implica que $\alpha = -\theta$ ou $\alpha = -\theta + \pi/2$. Pode se verificar que primeiro valor corresponde ao eixo maior da elipse, e o segundo à direção do eixo menor, que neste caso se anula.

De modo geral, teremos

$$tan(2\alpha) = cos\varphi\, tan(2\theta). \tag{2}$$

Valores intermediários de φ, entre a situação de meia onda e onda completa, resultam em uma elipse "girada" na saída do meio birrefringente.

b) a razão entre os quadrados dos eixos menor e maior da elipse de polarização resultante e a potência total incidente é dada por:

$$a^2 = \frac{1}{4}\left[2 \pm (1 + \cos\varphi) \cdot \cos 2(\alpha - \theta) \pm (1 - \cos\varphi) \cdot \cos 2(\alpha + \theta)\right] \tag{3}$$

Da solução anterior, vemos que um dado valor de $tan(2\alpha)$ implica em duas soluções, uma com $2\alpha \subset [0, \pi]$, e outra com $2\alpha \subset [\pi, 2\pi]$, levando a um par de soluções ortogonais $(\alpha, \alpha+\pi/2)$.

A intensidade transmitida pelo analisador, normalizada pela intensidade total,

$$a^2 = \frac{I_1}{I_0} = cos^2\theta\, cos^2\alpha + sen^2\theta\, sen^2\alpha + 2\, cos\theta\, sen\theta\, cos\alpha\, sen\alpha\, cos\varphi, \tag{4}$$

pode ser reescrita como

$$a^2 = \frac{1}{4}\left[2 + (1 + \cos\varphi) \cdot \cos 2(\alpha - \theta) + (1 - \cos\varphi) \cdot \cos 2(\alpha + \theta)\right].$$

Os valores máximo e mínimo de a^2 são obtidos pela substituição de $\alpha_1 = arctan(cos\varphi\, tan(2\theta))/2$ e $\alpha_2 = \alpha_1 + pi/2$. Note que neste caso, usando as relações $cos(\alpha + pi/2) = -sen(\alpha)$ e $sen(\alpha + pi/2) = cos(\alpha)$, podemos obter os dois valores extremos da intensidade em função de $\alpha = \alpha_1$.

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{I_1}{I_0} = (cos^2\theta\, cos^2\alpha + sen^2\theta\, sen^2\alpha + 2\, cos\theta\, sen\theta\, cos\alpha\, sen\alpha\, cos\varphi) \\ b^2 &= \frac{I_2}{I_0} = (cos^2\theta\, cos^2\alpha + sen^2\theta\, sen^2\alpha - 2\, cos\theta\, sen\theta\, cos\alpha\, sen\alpha\, cos\varphi). \end{aligned}$$

Sugestão: faça o gráfico de $a^2 \times \alpha$ para diferentes valores de θ e φ. Verfique que o resultado obtido é da forma

$$a^2 = \frac{1 + \beta cos(2(\alpha - \alpha_1))}{2} \tag{5}$$

4^a **Questão**

Para uma polarização elíptica qualquer, como a mostrada na questão anterior, obtenha sua decomposição em duas componentes circularmente polarizadas (esquerda/direita) ou duas componentes linearmente polarizadas (vertical/horizontal), obtendo as relações entre as amplitudes e fases nestas duas representações.

De modo geral, uma polarização eliptica pde ser descrita por

$$\vec{E}_{in} = E_x cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_y sen(kz - \omega t)\hat{y}$$

Sendo que para uma polarização circular dextrógira teremos

$$\vec{E}_D = E_d(cos(kz - \omega t)\hat{x} + sen(kz - \omega t)\hat{y})$$

e para uma polarização levógira

$$\vec{E}_L = E_l(cos(kz - \omega t)\hat{x} - sen(kz - \omega t)\hat{y}).$$

Queremos obter uma combinação de onda levógira e dextrógira que resulte em uma polarização elíptica. Ou seja

$$\vec{E}_{in} = E_x cos(kz - \omega t)\hat{x} + E_y sen(kz - \omega t)\hat{y} = \vec{E}_D + \vec{E}_L.$$

o que implica em

$$\begin{aligned} E_x &= E_d + E_l \\ E_y &= E_d - E_l \end{aligned}$$

Portanto, a elipcidade corresponde a um desbalanceio entre as duas componentes de polarização circulares.