FGE0327-Introdução à Ótica I - Gabarito 5^a Lista

Prof. Marcelo Martinelli

1) Calcule a intensidade do padrão de interfer6encia formado pela superposição de uma onda esférica na aproximação paraxial

$$\vec{E}_1 = A \cdot \exp\left\{i\left[k \cdot z + k \cdot (x^2 + y^2)/z - \omega \cdot t\right]\right\}\hat{x} \tag{1}$$

e uma onda plana

$$\vec{E}_2 = A \cdot \exp\left[i\left(k \cdot z - \omega \cdot t\right)\right]\hat{x}. \tag{2}$$

Mostre que estas franjas tem simetria circular (Sugestão: o resultado fica mais evidente ao usar coordenadas cilíndricas).

Solução

Somando as duas ondas, com um fator de fase φ entre elas, teremos como resultante um campo da forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 e^{i\varphi} + \vec{E}_2 = A \cdot \exp\left[i\left(k \cdot z - \omega \cdot t\right)\right] \cdot \left[\exp(ik \cdot r^2/z) + 1\right]\hat{x} \tag{3}$$

A intensidade é proporcional ao módulo quadrado do campo. Portanto, teremos:

$$\begin{aligned} I = \vec{E} \cdot \vec{E}* &= |A|^2 \left[\exp(ik \cdot r^2/z + i\varphi) + 1\right] \cdot \left[\exp(-ik \cdot r^2/z) + 1\right] \\ &= 2|A|^2 \cdot \left[1 + \cos(kr^2/z + \varphi)\right] \end{aligned}$$

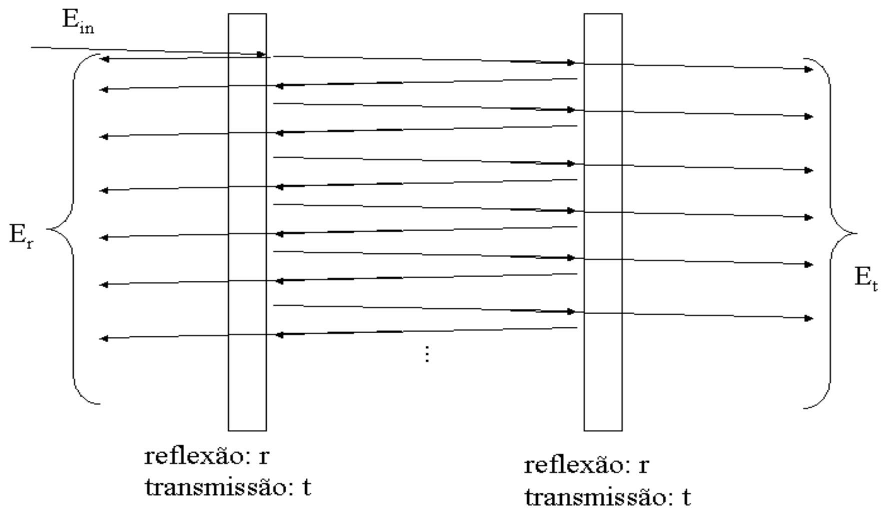
a qual é mínima para valores $\cos(kr^2/z + \varphi) = -1$. Isto leva a geração de círculos concêntricos (franjas escuras) separadas por franjas claras. O raio dos círculos escuros é dado por

$$kr^2/z + \varphi = (2n + 1)\pi$$
$$r = \sqrt{(n + 1/2)\, z\lambda + \varphi/2}$$

2) O interferômetro de Fabry-Perot consiste em dois semi-espelhos, alinhado um de frente para o outro, conforme mostra a figura.

A onda incidente, parcialmente transmitida, sofre múltiplas reflexões nos espelhos, e em cada reflexão parte da luz é transmitida. O campo resultante corresponde a uma série convergente, que dá o campo total transmitido e o campo total refletido pelo interferômetro.

Calcule o valor destes campos, para uma onda plana incidente



Solução Como vimos em aula, o campo incidente é refletido pelo primeiro espelho e transmitido para o interior da cavidade, sofrendo múltiplas reflexões. Para obter o campo refletido e o transmitido, devemos fazer a soma dos campos com reflexão múltipla, calcular sua transmissão pelos espelhos de acoplamento, e somar ao campo refletido na primeira reflexão para obter o campo refletido pela cavidade.

$$\begin{aligned}
E_r &= -rE_{in} + t\sum_{n=1}^{\infty} tE_{in}e^{i\varphi}(r'\cdot e^{i\varphi})^n(r\cdot e^{i\varphi})^{n-1} \\
&= E_{in}\left[-r + t^2 r'\cdot e^{i\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}(r'r\cdot e^{i2\varphi})^n\right]; \\
E_t &= t'\sum_{n=0}^{\infty} E_{in}te^{i\varphi}(r'\cdot e^{i\varphi})^n(r'\cdot e^{i\varphi})^n \\
&= E_{in}t'te^{i\varphi}\sum_{n=1}^{\infty}(r'r\cdot e^{i2\varphi})^n.
\end{aligned} \tag{4}$$

Lembrando que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}; \qquad |\alpha| < 1 \tag{5}$$

temos, para $t = t'$ e $r = r'$

$$\begin{aligned} r_{fp} &= r\left[-1 + \frac{t^2 \cdot e^{i2\varphi}}{1 - r^2 \cdot e^{i2\varphi}}\right]; \\ t_{fp} &= \frac{t^2 \cdot e^{i\varphi}}{1 - r^2 \cdot e^{i2\varphi}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Tirando o módulo quadrado, obtemos enfim

$$\begin{aligned} T_{fp} &= \frac{|t|^4}{1 - |r|^4 - 2|r|^2 \cos(i2\varphi + \delta)}; \\ R_{fp} &= 1 - T_{fp}. \end{aligned}$$