```
> restart;
```

A solução é mais fácil se ser demonstrada empregando um programa de cálculo, como o Maple.

```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

A) A relação entre posição de imagem e objeto em uma lente é dada pelo produtode matrizes referentes a uma propagação em espaço livre por uma distância dO (imagem à lente, matriz Mo), transformação por uma lente de distância focal f (matriz Mf), e propagação por uma distância di, da lente ao plano da imagem (matriz Mi)

```
> Mdo:=matrix([[1,dO],[0,1]]);
```

$$Mdo := \begin{bmatrix} 1 & dO \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Mf:=matrix([[1,0],[-1/f,1]]);
```

$$Mf := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Mdi:=matrix([[1,di],[0,1]]);
```

$$Mdi := \begin{bmatrix} 1 & di \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> M:=multiply(Mdi,Mf,Mdo);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 - \frac{di}{f} & \left(1 - \frac{di}{f}\right) dO + di \\ -\frac{1}{f} & -\frac{dO}{f} + 1 \end{bmatrix}$$

Sendo a matriz M

```
> M:=matrix([[A,B],[C,D]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & \mathrm{D} \end{bmatrix}$$

Fazendo B=0, vemos que

```
> 1/f=1/dO+1/di;
```

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{dO} + \frac{1}{di}$$

```
> 
```

B) Com isso, o termo A da matriz fica

```
> A:=di/dO;
```

$$A := \frac{di}{dO}$$

Que é a relação do aumento de imagem em uma lente.

```
> 
```

C) Vamos multiplicar as matrizes de transformação, considerando:
-a lente é feita de material com índice de refração nl, imersa em um meio de índice de refração n
- M1 é a matriz da primeira interface, de modo que para uma lente biconvexa, R1 é positivo
- M2 é a matriz da segunda interface, do mesmo modo, R2 é positivo neste caso.

```
> M1:=matrix([[1,0],[-(nl-n)/(nl*R1),n/nl]]);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{nl-n}{nl\,R1} & \dfrac{n}{nl} \end{bmatrix}$$

```
> M2:=matrix([[1,0],[-(n-nl)/(n*R2),nl/n]]);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-nl}{n\,R2} & \dfrac{nl}{n} \end{bmatrix}$$

```
> M:=expand(multiply(M2,M1));
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-nl}{n\,R2} - \dfrac{nl-n}{n\,R1} & 1 \end{bmatrix}$$

onde o termo C da matriz corresponde à equação do fabricante de lentes

```
> 1/f=(nl-n)*(1/R1-1/R2)/n;
```

$$\frac{1}{f} = \frac{(nl-n)\left(\dfrac{1}{R1} - \dfrac{1}{R2}\right)}{n}$$

D) Se inserirmos a propagação no interior da lente, por uma matriz

```
> Md:=matrix([[1,d],[0,1]]);
```

$$Md := \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> M:=expand(multiply(M2,Md,M1));
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{d\,(nl-n)}{nl\,R1} & \dfrac{d\,n}{nl} \\ -\dfrac{n-nl}{n\,R2} - \dfrac{\left(-\dfrac{(n-nl)\,d}{n\,R2} + \dfrac{nl}{n}\right)(nl-n)}{nl\,R1} & \dfrac{\left(-\dfrac{(n-nl)\,d}{n\,R2} + \dfrac{nl}{n}\right)n}{nl} \end{bmatrix}$$

Onde os termos

```
> A:=expand(M[1,1]);
```

$$A := 1 - \frac{d}{R1} + \frac{d\,n}{nl\,R1}$$

```
> B:=M[1,2];
```

$$B := \frac{d\,n}{nl}$$

```
> C:=expand(M[2,1]);
```

$$C := -\frac{1}{R2} + \frac{nl}{n\,R2} + \frac{2\,d}{R1\,R2} - \frac{d\,n}{nl\,R1\,R2} - \frac{nl\,d}{R1\,n\,R2} - \frac{nl}{R1\,n} + \frac{1}{R1}$$

```
> De:=expand(M[2,2]);
```

$$De := -\frac{n\,d}{nl\,R2} + \frac{d}{R2} + 1$$

Podem ser associados à propagação no modelo de lente espessa, onde o feixe atravessa uma espessua h1, sofre uma transformação de lente, e em seguida atravessa um espaço h2

```
> Ma:=matrix([[1,h1],[0,1]]);
```

$$Ma := \begin{bmatrix} 1 & h1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Mc:=matrix([[1,h2],[0,1]]);
```

$$Mc := \begin{bmatrix} 1 & h2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Mb:=matrix([[1,0],[-1/f,1]]);
```

$$Mb := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(multiply(Mc,Mb,Ma));
```

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{h2}{f} & \left(1 - \frac{h2}{f}\right) h1 + h2 \\ -\frac{1}{f} & -\frac{h1}{f} + 1 \end{bmatrix}$$

Vemos que

```
> 1/f=(nl-n)/n*(1/R1-1/R2+(nl-n)*d/(nl*R1*R2));
```

$$\frac{1}{f} = \frac{(nl - n)\left(\frac{1}{R1} - \frac{1}{R2} + \frac{(nl - n)\, d}{nl\, R1\, R2}\right)}{n}$$

```
> h1:=-f*(nl-n)/(R2*nl);
```

$$h1 := -\frac{f\,(nl - n)}{R2\, nl}$$

```
> h2:=-f*(nl-n)/(R1*nl);
```

$$h2 := -\frac{f\,(nl - n)}{R1\, nl}$$

E o termo B se iguala em ambas as matrizes.

```
> M1:=matrix([[1,0],[-1/f1,1]]);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f1} & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Md:=matrix([[1,f1+f2],[0,1]]);
```

$$Md := \begin{bmatrix} 1 & f1 + f2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> M2:=matrix([[1,0],[-1/f2,1]]);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f2} & 1 \end{bmatrix}$$

```
> M:=simplify(multiply(M2,Md,M1));
```

$$M := \begin{bmatrix} -\frac{f2}{f1} & f1 + f2 \\ 0 & -\frac{f1}{f2} \end{bmatrix}$$¶

Vemos portanto que o telescópio transforma o ângulo de um raio incidente, de forma independente com a altura. Note ainda que para um feixe de raios paralelos, a altura dos raios na saída é amplificada pela razão entre as distâncias forcais (formando uma imagem invertida).¶