Lista de Exercícios 9 – Centro de Massa, Rotação e Momento Angular
(+ Gabarito)

1. Sistemas de Partículas e Conservação do Momento

1)

• Uma criança de 24 kg está a 20 m de um adulto de 86 kg. Onde está o centro de massa do sistema? Considere a posição da criança como origem.

Use a Eq. 8-4 $x_{cm} = (86 \times 20/110)\ \text{m} = 15.6\ \text{m}$

2.

••• Localizar o centro de massa de um hemisfério maciço homogêneo de raio R e massa M.

O elemento de volume de uma esfera é $dV = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$, onde θ é o ângulo polar e ϕ o ângulo azimutal. Suponha que a base do hemisfério é o plano xy. Nesse caso, $z = r\cos\theta$. Chamando de ρ a densidade volumétrica do material, temos, de acordo com a Eq. 8-5:

$$z_{cm} = \frac{\rho}{M}\int_0^R\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r^3 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta\, d\phi\, dr = \frac{\pi\rho R^4}{2M}\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi\rho R^4}{4M};\quad M = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi\rho R^3\right);\quad z_{cm} = \frac{3}{8}R.$$

3

• Um carro de 1500 kg avança para oeste a 20 m/s e um caminhão de 3000 kg avança para leste a 16 m/s. Determinar a velocidade do centro de massa do sistema.

Seja leste o sentido positivo do eixo $\boldsymbol{i}$; $v_{cm} = (\Sigma m_i \mathbf{v}_i)/M$ $\mathbf{v}_{cm} = [(3000 \times 16 - 1500 \times 20)/4500]\ \text{m/s}\ \boldsymbol{i} = 4\ \text{m/s}\ \boldsymbol{i}$

4

• Certo ou errado: (*a*) O momento de um corpo pesado é maior que o de um corpo leve quando ambos têm a mesma velocidade. (*b*) O momento de um sistema pode ser conservado mesmo quando a energia mecânica não for conservada. (*c*) A velocidade do centro de massa de um sistema é igual ao momento total do sistema dividido pela massa do sistema.

(*a*) Certo (para o módulo) (*b*) Certo (colisão inelástica) (*c*) Certo

5

• Um bloco de 3 kg está se movendo para a direita a 5 m/s e um segundo bloco de 3 kg está se movendo para a esquerda a 2 m/s. (*a*) Determine a energia cinética total dos dois blocos neste referencial. (*b*) Determine a velocidade do centro de massa do sistema de dois corpos. (*c*) Determine as velocidades dos dois blocos em relação ao centro de massa. (*d*) Determine a energia cinética dos dois blocos em relação ao centro de massa. (*e*) Mostre que diferença entre a resposta da parte (*a*) e a resposta da parte (*d*) é igual à energia cinética do centro de massa.

(*a*) $K = K_1 + K_2$ $K = (3 \times 25 + 3 \times 4)/2\ \text{J} = 43{,}5\ \text{J}$

(*b*) Use a Eq. 8-13 $\mathbf{v}_{cm} = (3 \times 5 - 3 \times 2)/6\ \boldsymbol{i}\ \text{m/s} = 1{,}5\ \boldsymbol{i}\ \text{m/s}$

6

•• Uma bala de massa m_1 é disparada com velocidade v contra o peso de um pêndulo balístico de massa m_2. O peso está preso a uma haste muito leve de comprimento L, livre para girar em torno da outra extremidade. A bala fica encravada no peso. Determine o menor valor de v para o qual o peso descreve uma volta completa.

1. Calcule v_i do sistema peso + bala para uma volta completa $(m_1 + m_2)v_i^2/2 = 2gL(m_1 + m_2)$; $v_i = 2\sqrt{gL}$
2. Use $p_i = p_f$ para obter v $v = 2[(m_1 + m_2)/m_1]\sqrt{gL}$

2. Rotação

7

•• O isótopo do berílio ^{4}Be é instável e decai em duas partículas α (núcleos de hélio de massa $m = 6{,}68 \times 10^{-27}$ kg), liberando uma energia de $1{,}5 \times 10^{-14}$ J. Determine as velocidades das duas partículas α, supondo que o núcleo de ^{4}Be se encontra inicialmente em repouso.

De acordo com a lei de conservação do momento, as velocidades das duas partículas α devem ser iguais e em sentidos opostos.

Use a lei de conservação de energia e calcule o valor de v_α — $2(m_\alpha v_\alpha^2/2) = 1{,}5 \times 10^{-14}$ J; $v_\alpha = 1{,}5 \times 10^6$ m/s

8

• Dois pontos de um disco que gira a velocidade angular constante estão a diferentes distâncias do eixo de rotação. Um deles está na periferia do disco, e o outro está a meia distância da borda ao centro. Que ponto cobre maior distância num certo intervalo de tempo? Que ponto varre o ângulo maior? Que ponto tem velocidade maior? E velocidade angular maior? Que ponto tem aceleração tangencial maior? E aceleração angular maior? E aceleração centrípeta maior?

1. O ponto que está na periferia cobre a maior distância. 2. Os dois pontos varrem o mesmo ângulo. 3. O ponto que está na periferia tem velocidade maior. 4. Os dois pontos têm a mesma velocidade angular. 5. A aceleração tangencial dos dois pontos é nula. 6. A aceleração angular dos dois pontos é nula. 7. O ponto que está na periferia tem maior aceleração centrípeta.

9

•• Um disco, a partir do repouso, efetua 10 voltas completas para atingir a velocidade angular ω. Se a aceleração angular for constante, quantas voltas serão necessárias para que a velocidade angular seja 2ω? (*a*) 10 rev (*b*) 20 rev (*c*) 30 rev (*d*) 40 rev (*e*) 50 rev

De acordo com a Eq. 9-9, $\omega^2 \propto \theta$ — $\theta_2 = 4\theta_1$; $\Delta\theta = 3\theta_1 = 30$ rev; (*c*)

10

• Uma roda parte do repouso com a aceleração angular constante de 2,6 rad/s² e rola durante 6 s. No final deste intervalo de tempo, (*a*) qual a velocidade angular? (*b*) Qual o ângulo varrido na rotação da roda? (*c*) Quantas voltas fez a roda? (*d*) Qual a velocidade e qual a aceleração de um ponto a 0,3 m de distância do eixo da roda?

(*a*) $\omega = \alpha t$ — $\omega = (2{,}6 \times 6)$ rad/s = 15.6 rad/s

(*b*), (*c*) $\theta = ½\alpha t^2$ — $\theta = 46{,}8$ rad = 7,45 rev

(*d*) $v = \omega r$, $a_c = r\omega^2$, $a_t = r\alpha$, $a = (a_t^2 + a_c^2)^{½}$ — $v = (15{,}6 \times 0{,}3)$ m/s = 4,68 m/s;

$a = [(0{,}3 \times 15{,}6^2)^2 + (0{,}3 \times 2{,}6)^2]^{½}$ m/s² = 73 m/s²

3. Conservação do Momento Angular

11

•• Uma moeda de 15 g, com 1,5 cm de diâmetro, gira em torno de um diâmetro vertical, que passa por um ponto fixo de uma mesa, a 10 rev/s. (*a*) Qual o momento angular da moeda em relação ao seu centro de massa? (*b*) Qual o momento angular da moeda em relação a um ponto da mesa, a 10 cm da moeda? Imagine, agora, que a moeda gira em torno de um diâmetro vertical a 10 rev/s e, ao mesmo tempo, o centro de massa desloca-se numa reta paralela ao plano da mesa, a 5 cm/s. (*c*) Qual é o momento angular da moeda em relação a um ponto sobre a reta do deslocamento? (*d*) Qual o momento angular da moeda em relação a um ponto a 10 cm da reta do deslocamento do centro de massa? (Há duas respostas para a última pergunta. Encontre as duas e explique a razão desta dualidade.)

(*a*) $L = L_{rot} = I_{cm}\omega_{rot}$; $I = mr^2/4$ (Problema 9-44). — $L = (0{,}015 \times 0{,}0075^2/4)(20\pi)$ kg·m²/s $= 1{,}33 \times 10^{-5}$ kg·m²/s

(*b*) $L = L_{trans} + L_{rot}$; $L_{trans} = 0$ — $L = 1{,}33 \times 10^{-5}$ kg·m²/s

(*c*) $L_{trans} = 0$ (Problema 10-14) — $L = 1{,}33 \times 10^{-5}$ kg·m²/s

(*d*) $L_{trans} = \pm mvr = \pm 7{,}5 \times 10^{-5}$ kg·m²/s — $L = 8{,}83 \times 10^{-5}$ kg·m²/s; $L = -6{,}17 \times 10^{-5}$ kg·m²/s

12

•• Um corpo de massa m, deslizando sobre uma mesa horizontal sem atrito, está preso por um fio que passa por um buraco no centro da mesa. Inicialmente, o corpo desliza com a velocidade v_0, descrevendo um círculo de raio r. Calcular (a) o momento angular do corpo, (b) a energia cinética do corpo e (c) a tensão no fio. Uma pessoa, embaixo da mesa, puxa lentamente o fio. Que trabalho é efetuado para reduzir o raio do círculo de r_0 até $r_0/2$?

(a) $L_0 = r_0 m v_0$. (b) $K_0 = ½ m v_0^2$. (c) $T = m v_0^2/r_0$.

(d) Calcule I_f e $K_f = L_f^2/2I_f = L_0^2/2I_f$ $\quad$ $I_f = mr_0^2/4 = I_0/4$; assim, $K_f = 4K_0$

$W = K_f - K_0$ $\quad$ $W = 3K_0 = (3/2)mv_0^2$

13

• Uma partícula de 2 g descreve um círculo de 4 mm de raio com a velocidade constante de 3 mm/s. (a) Calcular o módulo do momento angular da partícula. (b) Se $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$ calcular o valor de $\ell(\ell+1)$ e estimar o valor aproximado de ℓ. (c) Explicar por que a quantização do momento angular não se percebe nos sistemas macroscópicos.

(a) $L = mvr$ $\quad$ $L = (2\times10^{-3}\times3\times10^{-3}\times4\times10^{-3})$ kg·m²/s

$= 2,4\times10^{-8}$ kg·m²/s

(b) $\ell(\ell+1) = L^2/\hbar^2$ $\quad$ $\ell(\ell+1) = (2,4\times10^{-8}/1,05\times10^{-34})^2 = 5,22\times10^{52}$;

$\ell = 2,29\times10^{26}$

(c) Não é possível distinguir entre $\ell = 2\times10^{26}$ e

$\ell = 2\times10^{26} + 1$