MECÂNICA 1

2ª LISTA DE EXERCÍCIOS   Turma 2/2007

1)Oscilador harmônico em três dimensões:

Uma partícula de massa m está sujeita ao potencial $V(r)=\frac{1}{2}kr^2$

a)Mostre que a trajetória da partícula está sempre contida num plano e identifique esse plano quando, em t=0, a partícula se encontra no ponto $(x,y,z)=(x_0,0,0)$ com velocidade $(v_x,v_y,v_z)=(o,v_0,o)$.

b)Mostre que as componentes da equação de Newton se separam em coordenadas cartesianas e use as respectivas soluções para mostrar que as órbitas do movimento são fechadas.

c)Obtenha a relação entre a energia E e o momento angular L para órbitas circulares.

2)Campo dipolar:

Uma partícula de massa m se move no espaço sujeita à força $F_r=\frac{2\alpha\cos\theta}{r^3}$, $F_\theta=\frac{\alpha \,\mathrm{sen}\,\theta}{r^3}$ e $F_\phi=0$, em coordenadas esféricas.

a)Mostre que esse campo de forças é conservativo e obtenha o seu potencial $V\left(\vec{r}\right)$.

b)Mostre que a projeção do momento angular $\vec{L}$ no eixo z é uma constante do movimento. Sugestão: utilize os operadores diferenciais em coordenadas esféricas.

3)Uma partícula de massa m se move sob a ação de uma força central $F=-\frac{k}{r^2}$ com k>0. No ponto P, que dista **a** da origem, sua velocidade é perpendicular a $\vec{r}$ e vale $v_0=\sqrt{\frac{k}{2ma}}$.

a)Esboce o gráfico do potencial efetivo em função de r, indicando o ponto P.

b)Qual é a energia cinética da partícula no ponto de máxima aproximação da origem?

c)O movimento está contido numa região finita do espaço? Justifique.

d)Calcule a freqüência de pequenas oscilações radiais em torno do ponto de mínimo e compare com a freqüência de revolução(movimento circular). O que se pode concluir sobre as órbitas?

4)Uma partícula de massa m se move numa região do espaço onde age uma força $F=\frac{y\hat{j}+z\hat{k}}{\left(y^2+z^2\right)}$.

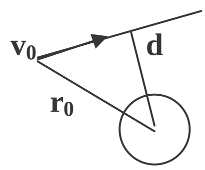
a)A energia se conserva? Justifique, e, em caso afirmativo, calcule o potencial.

b)Quais as componentes do momento que são conservadas? Justifique.

c)Quais as componentes do momento angular em torno da origem que se conservam? Justifique.

5)Uma partícula de massa m está sujeita a uma força dada em coordenadas polares por: $\vec{F}=3r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{r}+r^3\cos\theta\,\hat{\theta}$.

a)Escreva as equações diferenciais do movimento.
b)Calcule o torque da força em torno da origem e mostre que satisfaz o teorema do momento angular. Quais as componentes do momento angular que são conservadas?
c)Há conservação de energia? Por que?
6)Uma partícula de massa m se move sob a ação de uma força central cujo potencial é dado por $V(r)= Kr^4$, com $K>0$.
a)Para que valores da energia e do momento angular a órbita será um círculo de raio **a** em torno da origem?
b)Qual será o período do movimento circular?
c)Se a partícula for ligeiramente afastada dessa órbita, qual será o período de pequenas oscilações em torno de **a**?
d)A órbita será fechada?
7)Determine quais das seguintes forças são conservativas e calcule a energia potencial correspondente para as que forem:
a)$F_x = ax + by^2$, $F_y = az + 2bxy$, $F_Z = ay + bz^2$
b)$F_x = ay$, $F_y = az$, $F_z = ax$
c)$F_r = 2ar\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi$, $F_\theta = ar\cos\theta\,\text{sen}\varphi$, $F_\varphi = ar\cos\varphi$
d) $\vec{F} = F_x(x)\hat{i} + F_y(y)\hat{j} + F_z(z)\hat{k}$
e)$F_\rho = a\rho^2\cos\varphi$, $F_\varphi = a\rho^2\,\text{sen}\varphi$, $F_z = 2az^2$
f)$F_x = ay(y^2- 3z^2)$, $F_y = 3ax(y^2 - z^2)$, $F_z = -6axyz$
8)Demonstre que: $\vec{F} = F(r)\hat{r}$ é uma força conservativa, mostrando por cálculo direto que a integral: $\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}.d\vec{r}$ ao longo de qualquer caminho entre r_1 e r_2 depende somente de r_1 e de r_2. Expresse $\vec{F}$ e $d\vec{r}$ em coordenadas esféricas.
9)Descobre-se um asteróide que está a uma distância $\mathbf{r_0=2,0 \times 10^9\ m}$ da Terra com uma velocidade de $\mathbf{v_0=1,0 \times 10^4\ m/s}$. A distância entre a trajetória do asteróide nesse ponto e o centro da Terra é $\mathbf{d=3 \times 10^7 m}$. A que distância mínima do centro da Terra passará o asteróide?



10) Mostre que se a lei de força central de atração for definida por $F(r) = -\dfrac{K}{r^2}, K > 0$, a trajetória da partícula será uma cônica.

11) De acordo com a teoria da força nuclear de Yukawa, a força entre um nêutron e um próton tem o seguinte potencial: $V(r) = -\dfrac{Ke^{-\alpha r}}{r}, K > 0$.
a)Determine a força, comparando-a com a força da lei do inverso do quadrado da distância.
b)Discuta os tipos de movimento que podem ocorrer, caso uma partícula de massa m se desloque sob a ação de tal força.
c)Determine L e E para o movimento em círculo de raio a. Determine o período do movimento circular e o período de pequenas oscilações radiais.
d)Mostre que as órbitas aproximadamente circulares são quase fechadas quando a é muito pequeno.

12) Considere uma força central dada por: $F(r) = -\frac{K}{r^2} + \frac{K'}{r^3}$, $K > 0$ e $K' > e < 0$

a)Discuta quais os possíveis movimentos que uma partícula de massa m pode ter, quando sujeita a essa força.

b)Resolva a equação orbital, mostrando que para $L^2 > -mK'$, as órbitas ligadas têm a forma: $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\alpha\theta}$

c)Mostre que esta elipse tem movimento de precessão e determine a velocidade angular de precessão. Verifique se o seu sentido é o mesmo ou oposto ao da velocidade angular orbital.

13) Considere o método do potencial efetivo para a força: $F = -\frac{K}{r^3}$, $K > 0$

a)Discuta os tipos possíveis de movimento que se pode esperar a partir dessa força.

b)Determine o intervalo de energia e o momento angular para cada tipo de movimento.

c)Resolva a equação orbital: $\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)$ mostrando que a solução tem uma das seguintes formas:

$$\frac{1}{r} = A\cos[\beta(\theta-\theta_0)]$$
$$\frac{1}{r} = A\cosh[\beta(\theta-\theta_0)]$$
$$\frac{1}{r} = A\,\mathrm{senh}[\beta(\theta-\theta_0)]$$
$$\frac{1}{r} = A[(\theta-\theta_0)]$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}e^{\pm\beta\theta}$$

d)Para que valores de E e L cada um desses movimentos ocorre? Expresse as constantes A e β em termos de E e L em cada caso.

e)Faça um gráfico da órbita de cada um dos tipos acima.

14) Considere uma partícula de massa m sujeita a uma força $\vec{F} = -k\vec{r}$, k>0(oscilador harmônico isotrópico). O momento angular da partícula é L.

a)Determine a energia potencial.

b)Mostre que o menor valor da energia para essa partícula é: $E_{min} = \left(\frac{kL^2}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

c)Mostre que para uma dada energia total $E \geq E_{min}$ a trajetória está situada dentro de um anel $r_1 \leq r \leq r_2$, com $r_1 = \sqrt{\frac{E}{k}}\left[1 - \sqrt{\frac{kL^2}{mE^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$ e $r_2 = \sqrt{\frac{E}{k}}\left[1 + \sqrt{\frac{kL^2}{mE^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$ onde r_1 e r_2 são as raízes da equação $E = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$.

15) Observa-se um cometa a uma distância de 1,00 x 10^8 km do Sol, viajando em direção a ele à velocidade de 51,6 km por segundo, num ângulo de 45^0 em relação ao raio do Sol. Escreva a equação para a órbita do cometa, em coordenadas polares, com a origem no Sol e o eixo x passando pela posição em que o cometa foi observado. Considere a massa solar como 2,00 x 10^{30} kg.

16)A distância de periélio(mais próxima) ao Sol do planeta Marte é de 2,06 x 10^8 km, e a distância do afélio(máxima) é de 2,485 x 10^8 km. Suponha que a Terra se mova no mesmo plano em círculo de raio 1,49 x 10^8 km e um período de um ano. A partir desses dados, determine a velocidade de Marte no periélio. Suponha que uma nave espacial Mariner seja lançada de forma que seu periélio esteja na órbita terrestre e o seu afélio, no periélio de Marte. Determine a velocidade do Mariner relativa a Marte, no ponto onde eles se encontram. Qual deles tem a velocidade maior? Qual deles tem a maior velocidade angular durante o período de vôo?

17) Mostre que para uma força central repulsiva, proporcional ao inverso do raio ao cubo, $F = \frac{K}{r^3}$, $K > 0$, as órbitas têm a forma: $\frac{1}{r} = A\cos\left[\beta\left(\theta - \theta_0\right)\right]$. Expresse β em termos de K, E, L e a massa m da partícula incidente. Mostre que a seção de choque para espalhamento através de um ângulo entre Θ e Θ + $d\Theta$, para partículas submetidas a essa força, é: $d\sigma = \frac{2\pi K}{mv_0^2}\frac{\pi - \Theta}{\Theta^2\left(2\pi - \Theta\right)^2}d\Theta$

18) Uma partícula de carga q e massa m, em repouso num campo magnético $\vec{B} = B_0\hat{k}$, é submetida, no instante t=0, a um campo elétrico oscilante $\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}\omega t\,\hat{i}$. Determine o seu movimento.

Resolva esse mesmo problema para o caso em que $\omega = \frac{qB_0}{m}$.

19) Considere que a órbita da Terra em torno do Sol seja circular e que a massa do Sol subitamente se reduza à metade. Qual será, nesse caso, a órbita da Terra? A Terra escapará do sistema solar?

20) Uma partícula move-se sob a influência de uma força central $F(r) = -\frac{k}{r^n}, k > 0$. Mostre que se a órbita dessa partícula passar pelo centro de forças, n = 5.

21) Determine a lei de força para um campo central, que permite à partícula mover-se em órbita espiral dada por $r = k\theta^2$, onde k é uma constante.

22) Considere a família de órbitas em um potencial central onde a energia é uma constante. Mostre que se existir uma órbita circular estável, o momento angular associado a essa órbita, é o de maior valor em relação a todas as outras possíveis órbitas.