FAP151 – Fundamentos de Mecânica. Texto Complementar nº 8. Abril de 2007.

Integral indefinida ou ***a Determinação da posição de um objeto por meio da primitiva de v(t).***

Quando estudamos derivadas, montamos a seguinte tabela:

função	derivada	condição
$f(x)=C$	$\frac{df}{dx}=0$	C é independente de x
$f(x)=x^n$	$\frac{df}{dx}=nx^{n-1}$	qualquer n para $x>0$ somente n inteiro para $x<0$
$f(x)=sen(ax+b)$	$\frac{df}{dx}=a\cos(ax+b)$	ax medido em radianos
$f(x)=\cos(ax+b)$	$\frac{df}{dx}=-asen(ax+b)$	ax medido em radianos
$f(x)=g(x)+h(x)$	$\frac{df}{dx}=\frac{dg}{dx}+\frac{dh}{dx}$	
$f(x)=Cg(x)$	$\frac{df}{dx}=C\frac{dg}{dx}$	C é independente de x

Agora, entendendo a integração como operação inversa da derivação, ou seja,

$$\int f(x)dx=F(x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{dF}{dx},$$

podemos montar a seguinte tabela, onde $F(x)$ é chamada de primitiva de $f(x)$ ou antiderivada:

função, $f(x)$	Antiderivada, $F(x)=\int f(x')dx'$	condição
$f(x)=C$	$F(x)=Cx+cte$	C é independente de x
$f(x)=x^n$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+cte$	qualquer $n\neq-1$ para $x>0$; somente n inteiro e $n\neq-1$ p/ $x<0$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$F(x)=\frac{\text{sen}(ax+b)}{a}+cte$	ax medido em radianos
$f(x)=sen(ax+b)$	$F(x)=-\frac{\cos(ax+b)}{a}+cte$	ax medido em radianos
$f(x)=g(x)+h(x)$	$F(x)=G(x)+H(x)$	G e H, integrais de g e h
$f(x)=Cg(x)$	$F(x)=CG(x)$	C é independente de x

Esta tabela é obtida a partir da anterior permutando as colunas e, quando necessário, redefinindo as constantes que aparecem nas fórmulas.

A partir da primitiva, podemos calcular qualquer integral definida num intervalo $[a,b]$ dado, por

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\ .$$

Essa é também a área (ou a área multiplicado por −1) entre o gráfico da função e o eixo Ox. Note que a constante que sempre aparece na primitiva não importa neste cálculo, porque a integral definida é uma diferença da primitiva para dois valores distintos de x, ou seja, a constante é somada e subtraída no membro direito da equação acima, não dando qualquer contribuição para a integral.

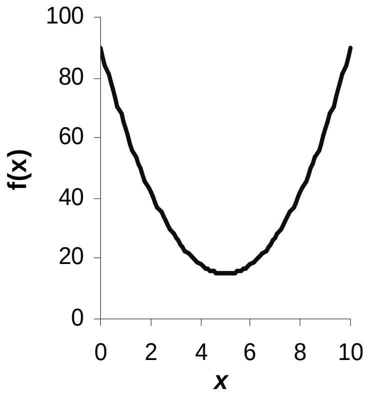
Os exercícios 13 a 24 da Lista 5 são exemplos de aplicação deste método. O exemplo abaixo busca apenas mostrar o formalismo.

Exemplo. Quando temos uma função do 2º grau, $y = a + bx + cx^2$, a primitiva é

$$F(x) = \int \left(a + bx + cx^2\right) dx ,$$

que, usando a regra de que a primitiva da soma é uma soma de primitivas, leva a

$$F(x) = \int a dx + \int bx dx + \int cx^2 dx .$$



Usando que a primitiva de uma constante multiplicada por uma função é a constante multiplicada pela primitiva da função, temos

$$F(x) = ax + C' + b\left(\frac{x^2}{2} + C''\right) + c\left(\frac{x^3}{3} + C'''\right).$$

Agora, reunindo as constantes todas numa só (afinal, a soma de constantes é uma constante), obtemos finalmente

$$F(x) = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + C \quad .$$

Assim, para calcular a área sob a parábola

$$y = 90 - 30x + 3x^2$$

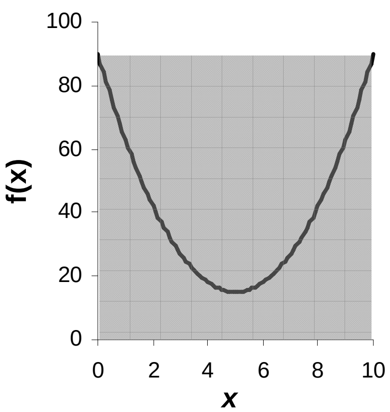
da figura acima entre $x = 0$ e $x = 10$, precisamos da primitiva, que é

$$F(x) = 90x - 15x^2 + x^3 + C$$

e a área entre $x = 0$ e $x = 10$ é

$$A = F(10) - F(0) = 90 \cdot 10 - 15 \cdot 100 + 1000 + C - C = 400 .$$

Esse valor é pouco menos da metade do retângulo de altura 90 e base 10, representado pela área acinzentada no desenho ao lado, determinado pelos extremos da curva no intervalo [0,10].



Note que poderíamos ter escolhido $C = 0$, porque, como estamos calculando uma diferença, o valor dessa constante acaba não entrando no cálculo.

A primitiva para o polinômio do 1º grau, $y = a + bx$, pode ser obtida do resultado acima, substituindo $c = 0$. Neste caso, porém, as figuras formadas pela curva com o eixo Ox são triângulos, retângulos e trapézios, cujas áreas podem ser calculadas geometricamente, dispensando o uso da primitiva.