Breves Comentários sobre a Parábola

A função do segundo grau, cujo gráfico tem a forma de uma parábola, é bastante usada nesta parte introdutória do curso de mecânica. Ela permite a representação matemática da queda livre e do lançamento de projéteis.

Dois pontos bastam para traçar uma reta, mas para caracterizar uma parábola ou outras curvas mais complexas são necessários pontos chaves e também comportamentos limites. Vejamos como obter essas características para uma função do segundo grau, cuja fórmula genérica é:

$y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes.

A forma genérica desta função está nas figuras 1a e 1b; note que y tende a infinito quando x tende a infinito, tanto no sentido positivo quanto negativo do eixo. Na figura, os pontos x_1 e x_2 são as raízes da equação $y(x) = 0$ e correspondem aos pontos de cruzamento da parábola com o eixo Ox, sendo, portanto, obtidos resolvendo essa equação do segundo grau, o que dá:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2c}{-b+\sqrt{\Delta}} \quad \text{e}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2c}{b+\sqrt{\Delta}} \quad ,$$

onde

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

é freqüentemente chamado de discriminante da equação, uma vez que é seu valor que define quantas raízes reais a equação tem.

O ponto de mínimo ou de máximo da parábola, x_m, pode ser determinado com base na simetria da figura. Ele é o ponto que fica na posição central entre x_1 e x_2 , portanto basta tirar a média entre esses dois valores para obtê-lo:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} \quad .$$

Esse ponto de extremo também pode ser obtido analisando a derivada da função, que é um procedimento que pode ser aplicado a qualquer curva. Note que, nos pontos de mínimo ou de máximo, a tangente à curva é horizontal (inclinação nula) e, portanto, a derivada nesse ponto é nula. Basta, portanto, determinar os pontos em que a derivada de uma função se anula para conhecer seus pontos de máximo ou mínimo. No caso da parábola, a função derivada é:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b$$

que, igualada a zero, fica:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_m} = 0 = 2ax_m + b \Rightarrow x_m = -\frac{b}{2a} \ .$$

As figuras 1a e 1b permitem analisar o comportamento da derivada de uma parábola tanto no caso da constante a ser positiva quanto negativa. Veja que, com $a > 0$, a derivada tem sinal negativo quando $x < x_m$ e positivo quando $x > x_m$. Isso significa que a parábola é decrescente no primeiro trecho e crescente no segundo, caracterizando um ponto de mínimo. Se $a < 0$, a situação é oposta. Portanto, para $a > 0$ o vértice da parábola é um ponto de mínimo e sua abertura é voltada para cima, enquanto que, para $a < 0$, o vértice é um ponto de máximo e a abertura é voltada para baixo.

Com relação às raízes da equação do segundo grau, note que Δ pode ser menor, igual ou maior que zero. Como x_1 e x_2 dependem da raiz quadrada de Δ, caso ele seja negativo, as raízes serão imaginárias. Portanto, neste caso não temos raízes reais, significando que a parábola não intercepta o eixo Ox em nenhum ponto, estando localizada totalmente acima ou totalmente abaixo deste eixo. No caso em que Δ=0, $x_1 = x_2$ (dizemos que a raiz é dupla), significando que a parábola tangencia o eixo Ox em apenas um ponto, exatamente nessa raiz dupla. As figuras 1a, 1b, 2a, 2b, 2c e 2d ilustram as parábolas que se obtêm com as diferentes combinações de sinais de a e Δ.

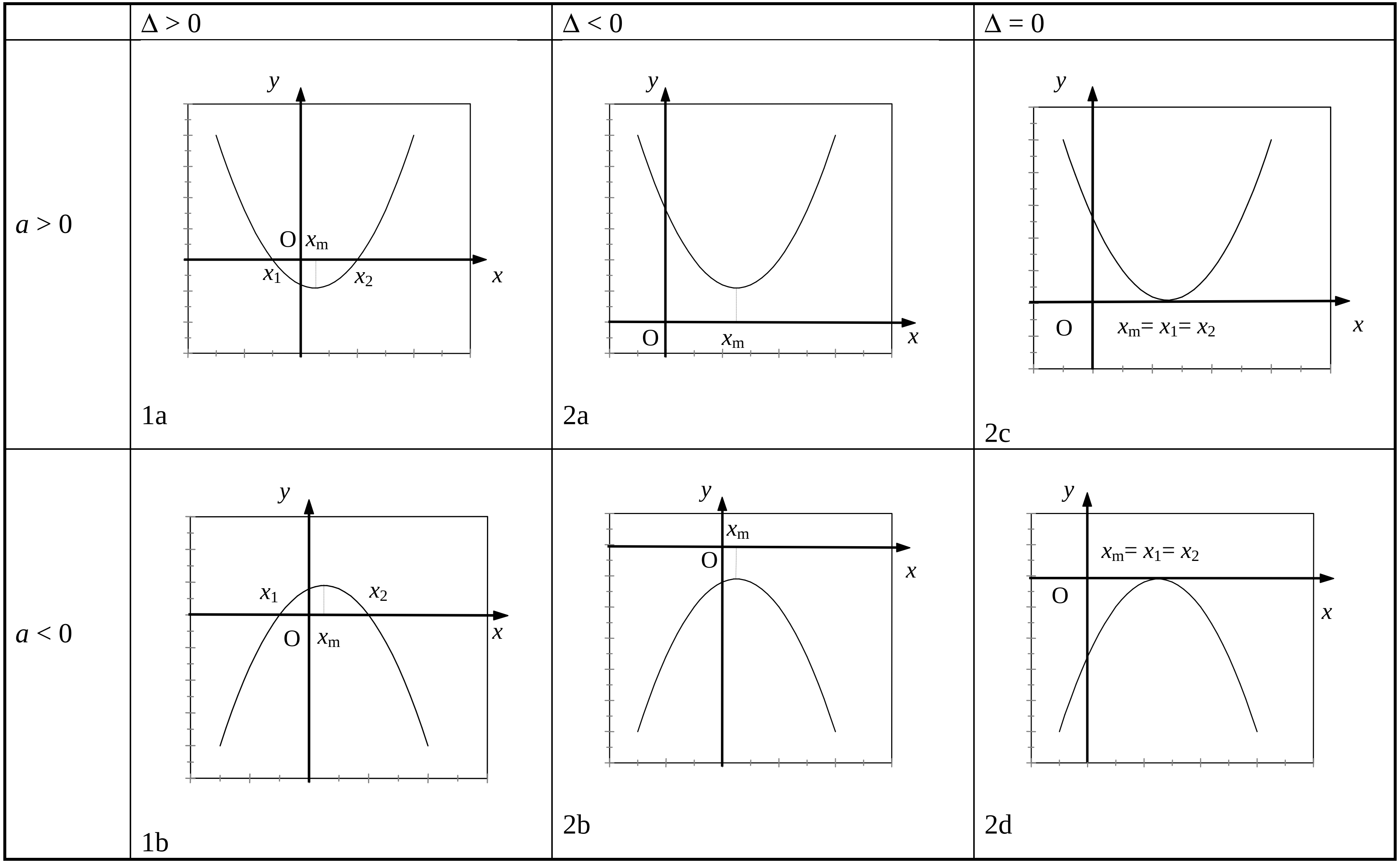

Figura. Diferentes desenhos da parábola, conforme a combinação de sinais do coeficiente do termo parabólico, *a*, e do discriminante, Δ. O eixo horizontal é o eixo *x*, o vertical é o eixo *y* e a intersecção dos dois eixos é o ponto O, chamado de origem do sistema de eixos.