Texto complementar n° 4. Março de 2007.

DERIVADAS

Este assunto será estudado no curso de Cálculo, de maneira que aqui o discutiremos apenas no sentido que interessa ao estudo da Mecânica nesta etapa inicial, sem nenhuma intenção de generalidade nem rigor.

Conforme apresentado no livro texto da disciplina (Halliday, Resnick, Krane), a derivada de uma função é o valor para o qual tende a razão entre a variação da função e a variação da variável independente. Sendo x a variável independente e $f(x)$ a função, a derivada é

$$\frac{df}{dx} = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

onde a última forma de escrever enfatiza que a derivada corresponde à proporção de variação de f com x.

A derivada de uma função é uma grandeza DIMENSIONAL, de maneira que NÃO pode ser confundida com a tangente do ângulo de inclinação da reta tangente ao gráfico (que é SEMPRE adimensional). A derivada deve, sim, ser interpretada como a inclinação da reta tangente ao gráfico, conforme a seção 2.4 do livro do Halliday (5ª edição), onde está ilustrada qualitativamente pelas figuras 15 a 20 e quantitativamente pela figura 22.

Questão 1. Procedendo como na tabela 2.1 da página 27 do livro do Halliday, determine a velocidade em t = 2,0 s de um objeto que move-se de acordo com a equação horária $f(t) = 3 \cdot t^3$.

Derivada das potências

O processo de limite não precisa ser efetuado numericamente todas as vezes. O exemplo mais simples, detalhado a seguir, é a determinação da derivada de uma potência. Seja $f(x) = x^n$. Então

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1} \right) = nx^{n-1}$$

Na passagem da primeira para a segunda linha, expandimos a potência pelo binômio de Newton[1]. As passagens seguintes são algébricas, exceto a última, quando usamos que $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$.

Derivadas das funções trigonométricas

As derivadas das funções trigonométricas precisam de alguma explicação a mais. Antes de chegarmos às regras analíticas, faça um exercício com um exemplo numérico.

> ***Questão 2.*** Procedendo como na Questão 1 acima, determine a velocidade em *t* = 0,0 s da extremidade de um pêndulo de um relógio de parede, que move-se de acordo com a equação horária *x(t)* = 10 sen(2π*t)*, onde *x* está em cm quando *t* está em segundo e o argumento do seno está em radianos (o fator 2π que multiplica *t* no argumento do seno seria diferente se o argumento fosse em graus - esta questão de radianos ou graus é muito importante quando falamos de funções trigonométricas).

O cálculo da derivada do seno pode ser realizado de maneira parecida com o efetuado para derivar as potências de *x*:

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(x+\Delta x) - \mathrm{sen}(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)\cos(\Delta x) + \mathrm{sen}(\Delta x)\cos(x) - \mathrm{sen}(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)\left(\cos(\Delta x) - 1\right)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\,\mathrm{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \mathrm{sen}(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\cos(\Delta x) - 1\right)}{\Delta x} + \cos(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

A segunda linha da dedução acima foi obtida pela expansão do $\mathrm{sen}(x+\Delta x)$. Para obter o resultado final, usamos

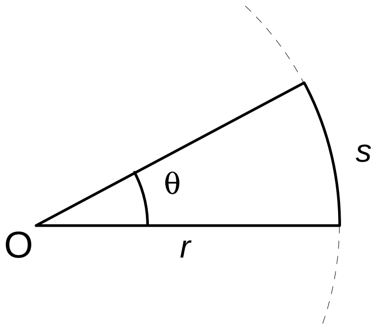
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\cos(\Delta x) - 1\right)}{\Delta x} = 0 \quad .$$

A razão $\frac{\mathrm{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$ só tende a 1 quando o ângulo tende a zero se o ângulo for medido em radianos. As fórmulas que estamos apresentando, portanto, exigem que trabalhemos em radianos; vamos detalhar o que entendemos por "medida do ângulo em radianos" antes de provar esse limite.

---

[1] O binômio de Newton é a fórmula da potência da soma de dois termos, $p+q$, e pode ser deduzida a partir de análise combinatória. Escreve-se assim: $(p+q)^n = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$, onde $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$.

A medida do ângulo em radianos



Para explicar como se mede um ângulo em radianos, apresentamos na figura ao lado a geometria da medida de um ângulo. O pontilhado representa um arco de uma circunferência de raio *r* com origem na interseção das duas retas que definem o ângulo θ. Essa interseção das retas foi designada por O na figura. O arco de circunferência delimitado pelas duas retas foi chamado de *s*. Dizemos que a medida do ângulo em radianos é $\theta = \frac{s}{r}$.

Assim, uma volta inteira, que corresponde a 360^o, vale, em radianos,

$$\text{volta inteira} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \ .$$

Dessa maneira descobrimos que, para transformar a medida de um ângulo em graus para radianos, basta calcular

$$\theta_{rad} = 2\pi \cdot \frac{\theta_{graus}}{360^o}$$

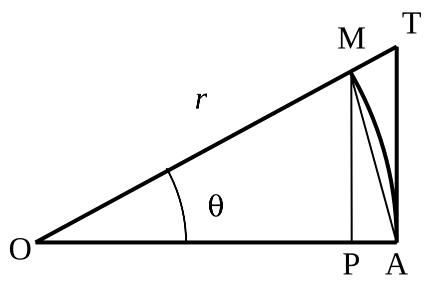
A tabela ao lado apresenta os valores em radianos dos ângulos mais utilizados.

ângulos mais comuns	
graus	radianos
30^o	$\pi/6$
45^o	$\pi/4$
60^o	$\pi/3$
90^o	$\pi/2$
180^o	π
270^o	$3\pi/2$
360^o	2π

Senos e tangentes de ângulos pequenos

À medida que o ângulo diminui, o seno e a tangente tendem a ter a mesma medida que o ângulo em radianos, ou seja,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 1 \quad \text{e} \quad \frac{\tan\theta}{\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 1 .$$



Esse comportamento pode ser demonstrado a partir da construção geométrica apresentada ao lado, onde AOM é um setor circular de raio r e que mede θ radianos. Os segmentos de reta MP e AT são perpendiculares ao raio AO, de forma que
$\mathrm{MP} = r \cdot \operatorname{sen}\theta$ e $\mathrm{AT} = r \cdot \tan\theta$.

Da figura, vemos que a área do setor circular de ângulo θ e raio *r* (= ½ $r^2\theta$) é maior que a do triângulo MOA (= ½ *r* MP = ½ *r r* sen θ) mas menor que a do triângulo TOA (= ½ *r* AT = ½ *r r* tan θ). Essas relações entre as áreas podem ser escritas matematicamente

$$\tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{sen}\theta < \tfrac{1}{2} r^2\theta < \tfrac{1}{2} r^2 \tan\theta,$$

de onde, como ½ r^2 é positivo, obtemos

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta < \theta < \tan\theta \qquad (1)}\ .$$

Dividindo sen θ por esses valores, obtemos

1 > sen θ / θ > cos θ

Como o cosseno tende a 1 quando θ tende a zero, assim a razão sen θ / θ tende a 1.

Dividindo a expressão (1) do quadrinho acima por tan θ, obtemos

cos θ < θ / tan θ < 1

o que mostra que também a tangente tende ao arco quando o ângulo tende a zero.

> Questão 3. Na dedução da fórmula da derivada do sen x precisamos da propriedade $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} = 0$. Mostre esse resultado a partir das propriedades geométricas da figura acima, notando que $r(1 - \cos\theta) = AP$. *Note que tudo que você precisa mostrar é que* AP/θ *vai a zero e não saber calculá-lo exatamente quando o ângulo é pequeno.*

Uma tabela de derivadas

As outras propriedades necessárias para efetuar as derivadas que usaremos neste início do estudo da Mecânica correspondem à derivada de uma soma de funções e à derivada de uma função multiplicada por um número. Essas regras, bem como as mostradas anteriormente, estão apresentadas na tabela abaixo.

função	derivada	condição
$f(x) = C$	$\frac{df}{dx} = 0$	C é independente de x
$f(x) = x^n$	$\frac{df}{dx} = nx^{n-1}$	$\forall x$ se n é inteiro; só $x > 0$ para n real
$f(x) = \mathrm{sen}(ax+b)$	$\frac{df}{dx} = a\cos(ax+b)$	ax medido em radianos
$f(x) = \cos(ax+b)$	$\frac{df}{dx} = -a\,\mathrm{sen}(ax+b)$	ax medido em radianos
$f(x) = g(x) + h(x)$	$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}$	
$f(x) = Cg(x)$	$\frac{df}{dx} = C\frac{dg}{dx}$	C é independente de x

Como um exemplo direto de aplicação, a função $f(t) = 5t^4 + 2\cos(3\pi t)$ tem como derivada a função $\frac{df}{dt} = 20t^3 - 6\pi\,\mathrm{sen}(3\pi t)$