

**ESTRUTURA DA MATÉRIA I - 1º SEMESTRE 2003**  
**6ª LISTA DE EXERCÍCIOS**

1.- Uma partícula está sujeita ao potencial de um oscilador harmônico, cuja função de onda é dada por:

$$\Psi(x) = Ae^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

(a) Seria a quantidade de movimento uma constante neste estado? Se sua resposta for positiva, determine o valor da quantidade de movimento. Se for negativa, determine o valor médio da quantidade de movimento. O que seria obtido em medidas da quantidade de movimento da partícula neste estado?

(b) É a energia mecânica conservada neste estado? Se sua resposta for positiva, determine o valor da energia. Se for negativa, determine o valor médio da energia. Que você obteria numa medida da energia da partícula neste estado?

c) Calcule  $\langle x \rangle$  e  $\langle x^2 \rangle$  para essa partícula.

d) Calcule a incerteza na medida da posição da partícula, definida como o desvio padrão.

e) Repita o cálculo de c) e d) para o momento da partícula e verifique se o princípio de incerteza é obedecido neste caso.

2) A função de onda para uma partícula confinada numa caixa de largura  $a$  é dada por:

$$\begin{cases} A \sin \frac{2\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar} & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & x < -a/2 \text{ ou } x > a/2 \end{cases}$$

a) Verifique que esta função é uma solução da equação de Schroedinger. b) Determine o valor da energia total  $E$  neste estado.

3.- Repita o cálculo do potencial degrau realizado em classe, para a condição  $E > V_0$ , considerando agora a função:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{para } x < 0 \\ 0 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcule os coeficientes de transmissão e reflexão e compare-os com os obtidos em classe.

4.- Mostre que o problema de uma partícula passando por um poço de potencial ( $V = 0$  para  $x < 0$ ,  $V = -V_0$  para  $0 \leq x \leq a$  e  $V = 0$  para  $x > a$ ), com  $E > 0$  é equivalente ao da barreira de potencial de altura  $V_0$  nas mesmas condições.

5.- Uma reação de fusão importante na produção de energia solar envolve a captura de um próton por um núcleo de carbono, que tem carga seis vezes maior que a do próton e um raio  $r \sim 2 \cdot 10^{-15}m$ . a) Faça uma estimativa do potencial coulombiano  $V$  que atua sobre o próton se ele estiver na superfície do núcleo. b) O próton incide sobre o núcleo devido seu movimento térmico. Podemos realisticamente supor que sua energia total não seja muito maior que  $10kT$ , onde  $T \sim 10^7K$  é a temperatura no interior do sol. Calcule sua energia total nessas condições e compare com a altura da barreira calculada no item anterior. c) Calcule a probabilidade de que o próton possa penetrar em uma barreira retangular equivalente, de altura  $V$  e se estendendo de  $r$  a  $2r$ , o ponto em que a barreira cai para  $V/2$ .

6.- Um átomo do gás nobre kripton exerce um potencial atrativo sobre um elétron não ligado que varia muito bruscamente. Devido a isto, é uma aproximação razoável descrever o

potencial como um poço quadrado atrativo de raio igual a  $4 \cdot 10^{-10}m$ , o raio do átomo. As experiências mostram que um elétron com energia cinética de 0,7 eV nas regiões fora do átomo pode atravessá-lo sem sofrer praticamente reflexão nenhuma. O fenômeno é chamado *efeito Ramsauer*. Use essa informação para determinar a profundidade ( $V_0$ ) do poço quadrado.

7.- Uma partícula confinada numa caixa de paredes impenetráveis e largura L está num estado cuja função de onda  $\Psi(x, t)$  é dada pela combinação linear:

$$\Psi(x, t) = c_1\Psi_1(x, t) + c_2\Psi_2(x, t)$$

onde  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  são as auto-funções de energia normalizadas para o estado fundamental (energia  $E_1$ ) e para o primeiro estado excitado (energia  $E_2$ ) respectivamente e  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

(a) Mostre que esta função de onda pode representar um estado quântico porque obedece a equação de Schrödinger dependente do tempo.

(b) Encontre o valor dessas constantes que normalizam a função de onda  $\Psi(x, t)$ .

(c) Seria a função de onda  $\Psi(x, t)$  um auto-estado de energia? Se sua resposta for positiva, determine o valor da energia; se for negativa, determine a energia média deste estado em função das auto-energias  $E_1$  e  $E_2$ . Em qualquer caso justifique sua resposta.

(d) Determine a densidade de probabilidade  $\Psi^*\Psi$ . O termo dependente do tempo representa uma oscilação. Obtenha a frequência dessa oscilação e tente interpretá-la.

8) Um próton e um dêuteron (mesma carga do próton, massa duas vezes maior) tentam penetrar em uma barreira de potencial de altura 10 MeV e largura  $10^{-14}$  m. As duas partículas têm energia de 3 MeV. a) Use argumentos qualitativos para prever qual das partículas tem maior probabilidade de consegui-lo. b) Calcule quantitativamente a probabilidade de sucesso para cada uma das partículas.

9) Aplique a condição de normalização para mostrar que a constante multiplicativa para a autofunção com  $n=3$  do poço de potencial quadrado infinito é  $B_3 = \sqrt{2/a}$ .

10) Uma bola de bilhar, de massa  $m=0.2$  kg e energia  $E$  é jogada na direção de uma rampa inclinada, de altura  $H=10$  cm. Para  $E=1.001 \cdot mgH$ , calcule qual a probabilidade da bola não conseguir subir a rampa.

11) Um dos estados excitados do átomo de hidrogênio tem função de onda dada por:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = Ar^2 e^{-r/3a} \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi}$$

onde A é uma constante e o sistema de coordenadas é o esférico.

a) Qual a expressão para o componente na direção z do momento angular nesse sistema?

b) Utilizando o resultado do item a), qual o componente z do momento angular para o átomo de hidrogênio no estado descrito pela função de onda acima?

12) No caso da barreira de potencial com  $E > V_0$ , como desenvolvido nas notas de aula: a) Mostre que se  $B=0$ , o coeficiente de transmissão será igual a 1. b) Mostre que nesse caso, a densidade de probabilidade para se encontrar a partícula na região  $0 < x < a$  é dada por:

$$\Psi_{II}^* \Psi_{II} = C^* C \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \left[ 1 + \left( 1 - \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \right) \cos^2 k_2 x \right]$$

c) Verifique também que a condição  $B=0$  implica em  $k_2 a = n\pi$ ,  $n=1,2,3,\dots$

13) Encontre  $|\Psi|^2 = \Psi(x)^* \Psi(x)$  para as soluções da barreira de potencial ( $E < V_0$  e  $E > V_0$ )